Lineární rovnice a jejich soustavy
Slovní úlohy

Přípravný kurz z matematiky – příprava na přijímací zkoušky na SŠ 2022

Radka Vyskočilová

Obsah kurzu

- Lineární rovnice
  - Základní tvar lineární rovnice
  - Příklady lineární rovnice
  - Ekvivalentní úpravy
  - Jak řešit lineární rovnice
- Soustavy lineárních rovnic
  - Soustavy lineárních rovnic – příklady
- Slovní úlohy
  - Slovní úlohy – příklady
  - Slovní úlohy – procvičování

Základní tvar lineární rovnice

Lineární rovnice jsou rovnice, které můžeme upravit na základní tvar

$$ax + b = 0$$

kde x je neznámá a koeficienty a, b jsou libovolná reálná čísla.

Přitom a nesmí být 0. Členu ax říkáme lineární člen a koeficientu b říkáme absolutní člen. Lineární rovnici tedy můžeme definovat následovně:

Lineární rovnice je rovnice, která obsahuje jednu neznámou x, která není nijak umocněná, odmocněná apod. Je to každá rovnice, kterou můžeme pomocí ekvivalentních úprav změnit na

$$y = ax + b, \text{ kde } a \neq 0$$

Příklady lineární rovnice

Podívejme se nyní na několik příkladů lineárních rovnic

$$x + 2 = 4$$

$$2x + 3 = 7$$

$$(3x+1)^2 + (4x+1)^2 = (5x+1)^2 + 5$$

$$\sqrt{5}\,(x-1) = \sqrt{3} - 3x$$

V horních příkladech si můžeme povšimnout dvou věcí:

1. Ne všechny příklady se zdají být na první pohled lineárními rovnicemi. Zejména třetí a čtvrtá rovnice vypadají trochu hrůzostrašně. My si ale ukážeme, že i tyto rovnice patří k lineárním rovnicím

2. Některé rovnice můžeme vyřešit docela jednoduše (většina z vás asi hned řekla, že řešením první rovnice je číslo 2). Na druhou stranu jsou zde i rovnice, které už tak lehce vyřešit nepůjde. Potřebujeme tedy nějaký konkrétnější postup.

$$x + 2 = 4$$
$$2x + 3 = 7$$
$$(3x+1)^2 + (4x+1)^2 = (5x+1)^2 + 5$$
$$\sqrt{5}(x-1) = \sqrt{3} - 3x$$

Když tedy horní rovnice upravíme do tvaru $ax + b = 0$, což také můžeme psát jako $ax = -b$, nejenže ukážeme, že daná rovnice je opravdu lineární, ale i řešení této rovnice bude snadné.

$$(3x+1)^2 + (4x+1)^2 = (5x+1)^2 + 5$$
$$9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 + 8x + 1 = 25x^2 + 10x + 1 + 5$$
$$25x^2 + 14x + 2 = 25x^2 + 10x + 6$$
$$14x - 10x = 6 - 2$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$

Našim cílem bude tedy dostat rovnice do tvaru $ax = -b$.
Laicky říkáme, dát všechno, kde se objevuje neznáma x na jednu stranu a vše ostatní na stranu druhou.

K tomu abychom dostali rovnice do takového tvaru, musíme buď upravit výrazy samotné (na levé a pravé straně zvlášť) nebo použít ekvivalentních úprav rovnic.

Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy jsou úpravy, které nezmění fakt rovnosti dvou čísel nebo výrazů.

To znamená, že čísla, která se rovnají (nebo nerovnají) před úpravou se musí rovnat (nebo nesmí rovnat) i po úpravě.

Jinými slovy se těmito úpravami nezmění výsledek rovnice. Cílem takovýchto úprav je dostat rovnici do tvaru, s kterým se lépe počítá.

Jaké ekvivalentní úpravy tedy známe?

Ivan Chiosea / Alamy Stock Photo

Přičítání reálného čísla nebo neznámé (popř. výrazu obsahujícího neznámou). Podívejme se následující dva příklady, které nám tuto úpravu lépe vysvětlí:

$$x - 5 = 10 \quad / +5$$
$$x = 10 + 5$$
$$x = 15$$

$$-x = -2x + 6 \quad / +2x$$
$$-x + 2x = 6$$
$$x = 6$$

Odečítání reálného čísla nebo neznámé (popř. výrazu obsahující neznámou). Opět si ukážeme dva příklady, na kterých bude zřetelné co tím myslíme.

$$x + 2 = 4 \quad / -2$$
$$x = 4 - 2$$
$$x = 2$$

$$3x = 2x + 6 \quad / -2x$$
$$3x - 2x = 6$$
$$x = 6$$

Násobení reálného čísla nebo neznámé (popř. výrazu obsahující neznámou) kromě nuly.
To znamená, že můžeme násobit vším kromě nuly.

$$\frac{x}{2} = 10 \quad / \cdot 2$$

$$\frac{x}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2$$

$$x = 20$$

$$\frac{4}{2x} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2x$$

$$\frac{4}{2x} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 2x$$

$$4 = x$$

U druhého příkladu je nutná podmínka, že výraz $2x$ se nesmí rovnat nule. To znamená, že neznámá x se nesmí rovnat nule. Jinak by byla nula ve jmenovateli a my víme, že nulou nesmíme dělit.

Dělení reálným číslem nebo neznámou (popř. výrazem obsahující neznámou) kromě nuly. Následující příklad nám tuto úpravu objasní:

$$7x = 14 \quad / : 7$$

$$7x : 7 = 14 : 7$$

$$x = 2$$

Pozor! Je nutné, abys danou úpravu použil na obě dvě strany rovnice (to znamená jak na celou levou, tak i na celou pravou stranu).

Jak řešit lineární rovnice?

U ekvivalentních úprav jsme viděli několik příkladů rovnic a jak tyto příklady řešit.

Cílem jakékoliv rovnice je najít takové x, pro které daná rovnost platí.

To znamená, že hledáme číslo, které můžeme za naší neznámou x dosadit tak, že naše rovnice platí. Obecně můžeme postup řešení popsat v následujících třech krocích.

1. Zjednodušení každé strany rovnice zvlášť (základní operace, roznásobování, vytýkání).
2. Osamostatnění neznáme x – dostat x na jednu stranu a vše ostatní na druhou stranu (pomocí ekvivalentních úprav).
3. Vypočítání neznáme x.

Podívejme se na následující rovnici, která nám tento postup objasní:

$$2(2x-1)=3(x+1)$$

V prvním kroku budeme jak levou tak i pravou stranu **roznásobovat**.

$$4x-2=3x+3$$

Nyní už budeme používat ekvivalentní úpravy, abychom osamostatnili neznámou x.

$$4x-2=3x+3 \quad /-3x$$

Nejdříve tedy odečteme z obou stran rovnice $3x$, abychom všechny výrazy, kde se vyskytuje x, dostali na levou stranu. Touto úpravou dostaneme:

$$x-2=3 \quad /+2$$

Nyní můžeme přičíst k oběma stranám 2, abychom čísla dostali na pravou stranou. Díky této úpravě vypočteme i naši neznámou x:

$$x=5$$

Interpretace výsledku rovnice

Řešením našeho příkladu je $x = 5$. Co to ale znamená?

Když si náš výsledek vezmeme a dosadíme do naší původní rovnice, obdržíme:

Levá strana: $2(2 \cdot 5 - 1) = 2(10 - 1) = 2 \cdot 9 = 18$

Pravá strana: $3 \cdot 5 + 3 = 15 + 3 = 18$

Po dosazení našeho výsledku do rovnice obdržíme tedy, že obě dvě strany rovnice se rovnají.

Tímto jsem se ujistili, že jsme naší rovnici vypočítali správně.

Soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých

Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých je:

- Dvojice lineárních rovnic, kde každá z rovnic obsahuje dvě neznámé. Obecně může být soustavou lineárních rovnic nazývána *n-tice* lineárních rovnic o n neznámých (v dnešním kurzu se budeme zabývat pouze soustavami tvořenými dvojicí rovnic o dvou neznámých).
- Rovnice v soustavě jsou lineární – obě neznámé jsou v první mocnině.

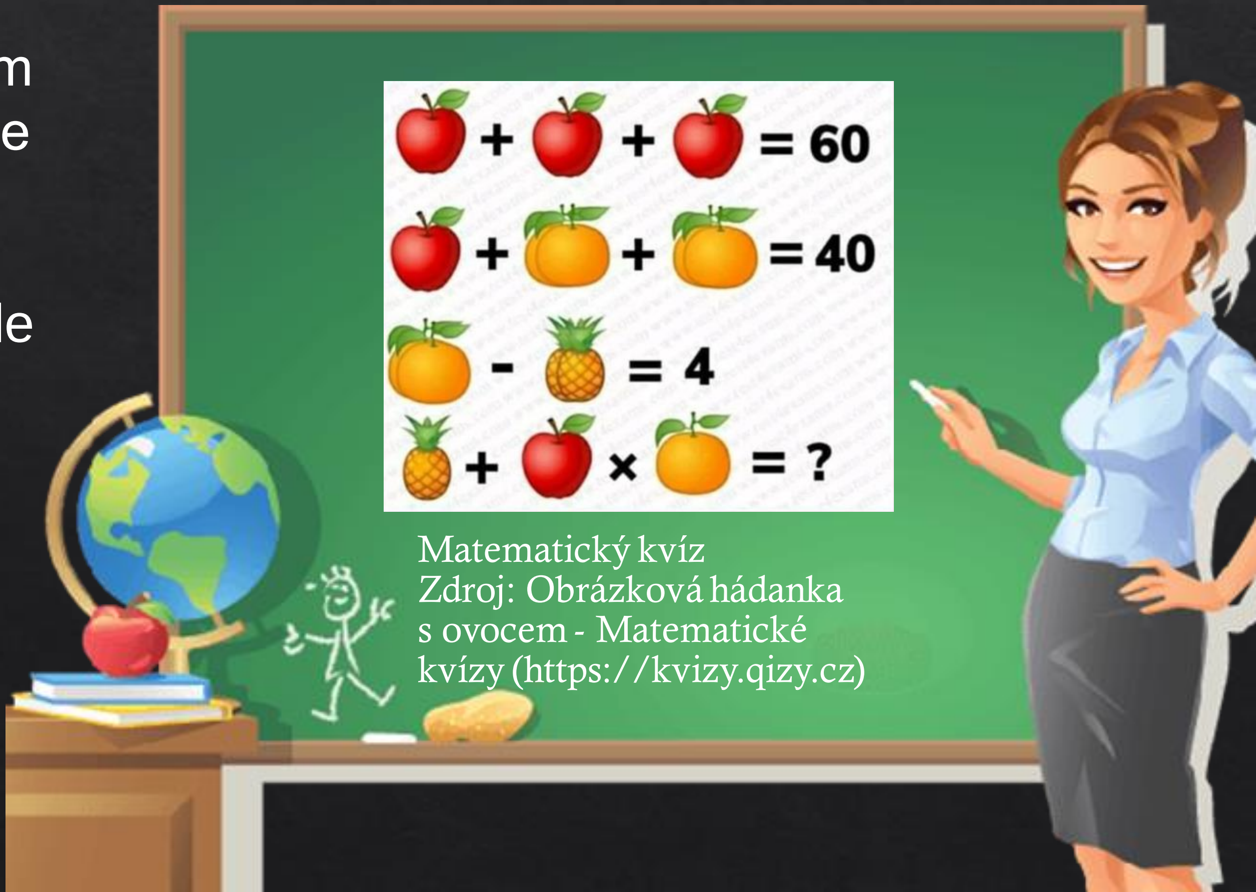
V důsledku toho, že budeme provádět pouze ekvivalentní úpravy rovnic, nemuseli bychom z matematického hlediska dělat zkoušku. V některých příkladech si ji však pro úplnost ukážeme (může být vyžadována v zadání).

Soustava dvou lineárních rovnic může mít:

- <u>právě jedno řešení</u> – tímto řešením je potom uspořádaná dvojice čísel, jedno číslo pro každou neznámou

- <u>žádné řešení</u> – situaci poznám podle toho, že nám v průběhu řešení vypadnou obě neznámé a zbyde nepravdivý číselný výrok (např. $0 = 3$)

- <u>nekonečně mnoho řešení</u> – situaci poznáme podle toho, že nám v průběhu řešení vypadnou obě neznámé a zbyde pravdivý číselný výrok ($0 = 0$)



Matematický kvíz
Zdroj: Obrázková hádanka s ovocem - Matematické kvízy (https://kvizy.qizy.cz)

PŘÍKLAD – 1. metoda - sčítací

Řešte soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme metodou, kterou jsem si oblíbila nejvíce – metodou adiční neboli sčítací. Principem této metody je upravit jednu nebo obě rovnice tak, aby po sečtení rovnic jedna z neznámých „vypadla“ a my dostali jednu rovnici o jedné neznámé.

Na tomto místě se přímo nabízí vynásobení druhé rovnice soustavy číslem 3:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - y &= 0 \quad / \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ rovnice sečteme

Po sečtení nám vzniká jedna rovnice o jedné neznámé. Důvodem je právě to, že jsme vhodně upravili druhou rovnici tak, aby po sečtení vypadla neznámá y.

$$2x + 3x + 3y - 3y = 5 + 0$$
$$5x = 5 \quad /:5$$
$$x = 1$$

Nyní máme jednu neznámou vypočtenou a můžeme počítat druhou. Jednoduše si vybereme jednu z rovnic v zadání (obvykle tu hezčí) a dosadíme za x vypočtenou hodnotu:

$$x - y = 0 \quad \text{/dosadíme za } \underline{x} \text{ číslo } 1$$
$$1 - y = 0$$
$$-y = -1 \quad /\cdot(-1)$$
$$y = 1$$

A je hotovo! Výsledek řešení soustavy rovnic může být zapsán dvěma základními způsoby:

$x = 1$
$y = 1$ → nebo jako uspořádaná dvojice čísel $[1;1]$

Máme obě neznámé, a pokud si věříme, z principu zkoušku dělat nemusíme (prováděli jsme pouze ekvivalentní úpravy). Pokud ale budeme chtít (nebo je vyžadována v zadání), stačí pouze výsledky dosadit
za neznámé do původních rovnic:

$$2x + 3y = 5$$
$$x - y = 0$$

$$L_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$$
$$P_1 = 5$$
$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 1 - 1 = 0$$
$$P_2 = 0$$
$$L_2 = P_2$$

PŘÍKLAD – 2. metoda - dosazovací

Řešte soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$2x - 3y = 5$$
$$x - 2y = 8$$

Na případě této soustavy si připomeneme metodu substituční, neboli dosazovací. Principem této metody je vyjádřit si jednu neznámou pomocí druhé, neboli vytvořit substituci. Tímto opět získávám jednu rovnici o jedné neznámé. Druhá rovnice soustavy se přímo nabízí k vytvoření substituce, a proto ji použijeme:

$$x - 2y = 8 \quad /+2y$$
$$x = 8 + 2y$$

Máme tedy vyjádřeno x pomocí y a toto nyní dosadíme do první rovnice:

$$2x - 3y = 5$$
$$2(8 + 2y) - 3y = 5$$

Jak sami vidíte, získali jsme opět jedinou rovnici s jednou neznámou. Řešíme rovnici v y:

$$16 + 4y - 3y = 5$$
$$16 + y = 5 \quad / -16$$
$$y = -11$$

Jednu neznámou máme hotovou, nyní stačí vypočítané y zpětně dosadit do substituce, kterou jsme na začátku řešení vyjádřili:

$$x = 8 + 2y$$
$$x = 8 + 2 \cdot (-11)$$
$$x = 8 - 22$$
$$x = -14$$

Soustavy lineárních rovnic - příklady

1) Řešte dosazovací metodou a proveďte zkoušku:

a)
$$\begin{aligned} 4x + y &= 5 \\ 3x - 5y &= 21 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + y &= 53 \\ x + 3y &= 74 \end{aligned}$$

2) Řešte sčítací metodou a proveďte zkoušku:

a)
$$\begin{aligned} 2x + y &= 23 \\ 4x - y &= 19 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 14 \\ 3x - 2y &= 19 \end{aligned}$$

Soustavy lineárních rovnic - řešení

1a) $4x + y = 5$ $\Rightarrow$ $y = 5 - 4x$ $\Rightarrow$ $y = 5 - 4\cdot 2$

$3x - 5y = 21$

$y = 5 - 8$

$y = -3$

$3x - 5(5 - 4x) = 21$

$3x - 25 + 20x = 21 \quad /+25$

$23x = 46 \quad /:23$

$x = 2$

Zk.:

$L_1 = 4\cdot 2 + (-3) = 8 - 3 = 5$

$P_1 = 5$

$L_2 = 3\cdot 2 - 5\cdot(-3) = 6 + 15 = 21$

$P_2 = 21$

$[x; y] = [2; -3]$

1b) $2x + y = 53 \Rightarrow y = 53 - 2x \Rightarrow y = 53 - 2\cdot 17 = 53 - 34 = 19$

$x + 3y = 74$

$x + 3(53 - 2x) = 74$

$x + 159 - 6x = 74 \quad / -159$

$-5x = -85 \quad /:(-5)$

$x = 17$

Zk.:

$L_1 = 2\cdot 17 + 19 = 34 + 19 = 53$

$P_1 = 53$

$L_2 = 17 + 3\cdot 19 = 17 + 57 = 74$

$P_2 = 74$

$[x; y] = [17; 19]$

2a) $\begin{aligned} 2x+y&=23 \\ 4x-y&=19 \end{aligned}$

$6x = 42 \quad /:6$

$x = 7$

$2x+y=23$

$2\cdot 7+y=23$

$14+y=23 \quad /-14$

$y=9$

Zk.:

$L_1 = 2\cdot 7+9 = 14+9 = 23$

$P_1 = 23$

$L_2 = 4\cdot 7-9 = 28-9 = 19$

$P_2 = 19$

$[x;y] = [7;9]$

2b) $4x+3y=14 \quad /\cdot 2$

$3x-2y=19 \quad /\cdot 3$

$8x+6y=28$

$9x-6y=57$

$17x = 85$

$x=5$

Zk.:

$L_1 = 4\cdot 5+3\cdot(-2) = 20-6=14$

$P_1 = 14$

$L_2 = 3\cdot 5-2\cdot(-2) = 15+4=19$

$P_2 = 19$

$4\cdot 5+3y=14$

$20+3y=14 \quad /-20$

$3y=-6 \quad /:3$

$y=-2$

$[x;y]=[5;-2]$

Slovní úlohy

V matematice existuje velké množství typů slovních úloh. Pro úspěšné řešení je nejlepší snažit se rozpoznat typ slovní úlohy a najít její řešení.

Zkusme se držet následujícího postupu:

1. Přečtu si zadání, pokud mi není jasné, přečtu si jej znovu (Je dobré, snažit se si konkrétní situaci představit ve skutečnosti...)
2. Určím si na co se mi slovní úloha ptá, co mám vyřešit
3. Označím si neznámou
4. Provedu zápis, slovní úlohu čtu od začátku a každý údaj se snažím zaznamenat pomocí matematického zápisu
5. Sestavím rovnici
6. Vyřeším rovnici
7. Provedu zkoušku

Doporučuji shlédnout toto [video]

Slovní úlohy - příklady

Vstupné na nedělní divadelní představení Kašpárek a jeho kamarádi je 50 Kč pro dospělé a 30 Kč pro děti. Kolik dospělých a kolik dětí navštívilo minulé představení, jestliže bylo prodáno 450 vstupenek a na vstupném bylo vybráno celkem 17 100 Kč?

Počet dětí x
Počet dospělých ... y

$$x + y = 450 \Rightarrow x = 450 - y \Rightarrow x = 450 - 180$$
$$x = 270$$
$$30x + 50y = 17100$$

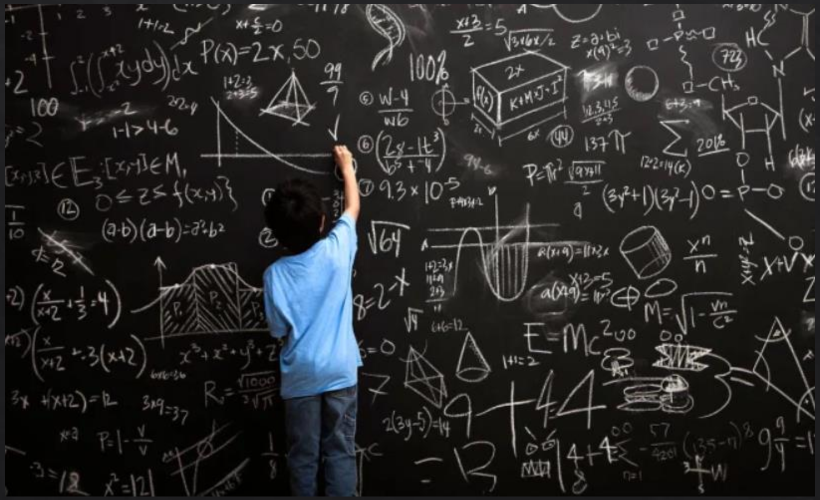
$$30(450 - y) + 50y = 17100$$
$$13500 - 30y + 50y = 17100$$
$$20y = 3600 \quad / : 20$$
$$y = 180$$

Na představení přišlo 180 dospělých a 270 dětí.

Slovní úkoly - příklady

1) Anička s dědečkem byli spolu sbírat houby, celkem jich měli v košíku 75. Kolik nasbírala Anička a kolik dědeček, když víme že dědeček jich měl o 15 více než Anička.

2) V kontrolním testu z matematiky je 25 otázek, za každou správnou odpověď se přičte 5 bodů, za každou chybějící nebo chybně zodpovězenou otázku se odečtou 3 body. Jakub dosáhl v tomto testu 69 bodů. Kolik chyb Jakub udělal, jestliže na dvě otázky neodpověděl?



Justin Lewis – Getty Obrázky

Slovní úlohy - řešení

1) Anička s dědečkem byli spolu sbírat houby, celkem jich měli v košíku 75. Kolik nasbírala Anička a kolik dědeček, když víme že dědeček jich měl o 15 více než Anička.

Anička ...... x $\Rightarrow 30$

Dědeček ...... $x+15$ $\Rightarrow 30+15=45$

Celkem 75

$$x+(x+15)=75$$

$$2x+15=75 \quad / -15$$

$$2x=60 \quad / :2$$

$$x=30$$

Anička nasbírala 30 hub a dědeček 45 hub.

Slovní úlohy - řešení

2) V kontrolním testu z matematiky je 25 otázek, za každou správnou odpověď se přičte 5 bodů, za každou chybějící nebo chybně zodpovězenou otázku se odečtou 3 body. Jakub dosáhl v tomto testu 69 bodů. Kolik chyb Jakub udělal, jestliže na dvě otázky neodpověděl?

správné odpovědi x
chybné odpovědi .... y

$$x + y = 25 \Rightarrow x = 25 - y \Rightarrow x = 25 - 7 = 18$$
$$5x + 3y = 69$$

$$5(25 - y) - 3y = 69$$
$$125 - 5y - 3y = 69$$
$$-8y = -56$$
$$y = 7$$

Jakub udělal 7 chyb.

Slovní úlohy - procvičování

Honza rád chodí na houby. Sbíral postupně tři dny. První den jich našel o sedm méně než třetí den a druhý den sebral o osm více než třetí den. Celkem nasbíral 79 hub. Kolik hub posbíral Honza v jednotlivých dnech?

1 den … x $\Rightarrow 19$

2 den … $(x+7)+8$ $\Rightarrow (19+7)+8 = 34$

3 den …. $x+7$ $\Rightarrow 19+7 = 26$

celkem …. 79

Zk.: $19+34+26 = 79$

$$x + [(x+7)+8] + (x+7) = 79$$
$$x + x + 7 + 8 + x + 7 = 79$$
$$3x + 22 = 79$$
$$3x = 57$$
$$x = 19$$

Honza nasbíral 19 hub 1 den, 34 hub druhý den a 26 hub třetí den.

Slovní úlohy - procvičování

Maminka koupila při příležitosti Mirkových narozenin 21 zákusků, jedna špička stála 9 Kč a kremrole stála 12 Kč. Za zákusky zaplatila 213 Kč. Kolik maminka koupila kremrolí a kolik špiček?

špička … x
kremrole … y

$x + y = 21 \Rightarrow x = 21 - y \Rightarrow x = 21 - 8 = 13$

$9x + 12y = 213$

$9(21 - y) + 12y = 213$

$189 - 9y + 12y = 213$

$3y = 24$

$y = 8$

Zk. $13 \cdot 9 = 117$

$8 \cdot 12 = 96$

213

Maminka koupila 8 kremrolí a 13 špiček.

Slovní úlohy - procvičování

Na lyžařský výcvikový kurz odjíždí ze sedmých tříd základní školy celkem 59 žáků. Na horské chatě budou bydlet ve třílůžkových a čtyřlůžkových pokojích, přičemž kapacita chaty bude zcela naplněna. Na chatě je k ubytování celkem 17 pokojů. Kolik je třílůžkových a kolik čtyřlůžkových pokojů?

3-lůžkových ... x
4-lůžkových ... y

$$x + y = 17 \quad /\cdot(-3)$$
$$3x + 4y = 59$$

$$-3x - 3y = -51$$
$$3x + 4y = 59$$
$$y = 8$$

$$x + 8 = 17$$
$$x = 9$$

Třílůžkových pokojů je 9 a čtyřlůžkových pokojů je 8.

Slovní úlohy - procvičování

Součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel je 42. Urči jejich nejmenší společný násobek.

1 číslo … x
2 číslo … $x+1$
3 číslo … $x+2$
4 číslo … $x+3$

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=42$$
$$4x+6=42$$
$$4x=36$$
$$x=9$$

Jsou to čísla 9, 10, 11 a 12.

$$n(9,10,11,12)=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11=1980$$
$$9=3\cdot 3=3^2$$
$$10=2\cdot 5$$
$$11=1\cdot 11$$
$$12=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3^2$$

Nejmenší společný násobek je 1980.

Zdroj:

- Doktor matika. *ROV02-01 – Jak řešit lineární rovnice* [online]. Dostupné z: https://drmatika.cz/wiki/rovnice
- Mgr. Lenka Nĕmetzová. *Soustavy rovnic – pracovní list* [online]. 12.1.2013. Dostupné z: http://www.zstrebovska-ustino.cz
- Řešení slovních úloh. *Slovní úlohy řešené pomocí lineárních rovnic* [online]. Dostupné z: https://www.skolarevnicov.cz/
- Přijímačky v pohodě 9 - matematika. Vydavatelství Taktik International, s.r.o., Praha, 2020, 5. vydání. ISBN 978-80-7563-289-0.