Pythagorova věta
Obvody a obsahy rovinných obrazců
Povrchy a objemy těles
Slovní úlohy o pohybu

Přípravný kurz z matematiky – příprava na přijímací zkoušky na SŠ 2022

Radka Vyskočilová

Úvod

Pythagorova věta

- Pythagorova věta – úvod
- Pythagorova věta - příklady

Obvody a obsahy rovinných obrazců

- Trojúhelník, čtverec
- Pravoúhlý trojúhelník, obdélník
- Rovnoběžník, kosočtverec
- Lichoběžník, kruh, kružnice
- Příklady

- Povrchy a objemy těles
  - Krychle, kvádr
  - Hranol
  - Válec
  - Jehlan
  - Kužel, koule
  - Příklady

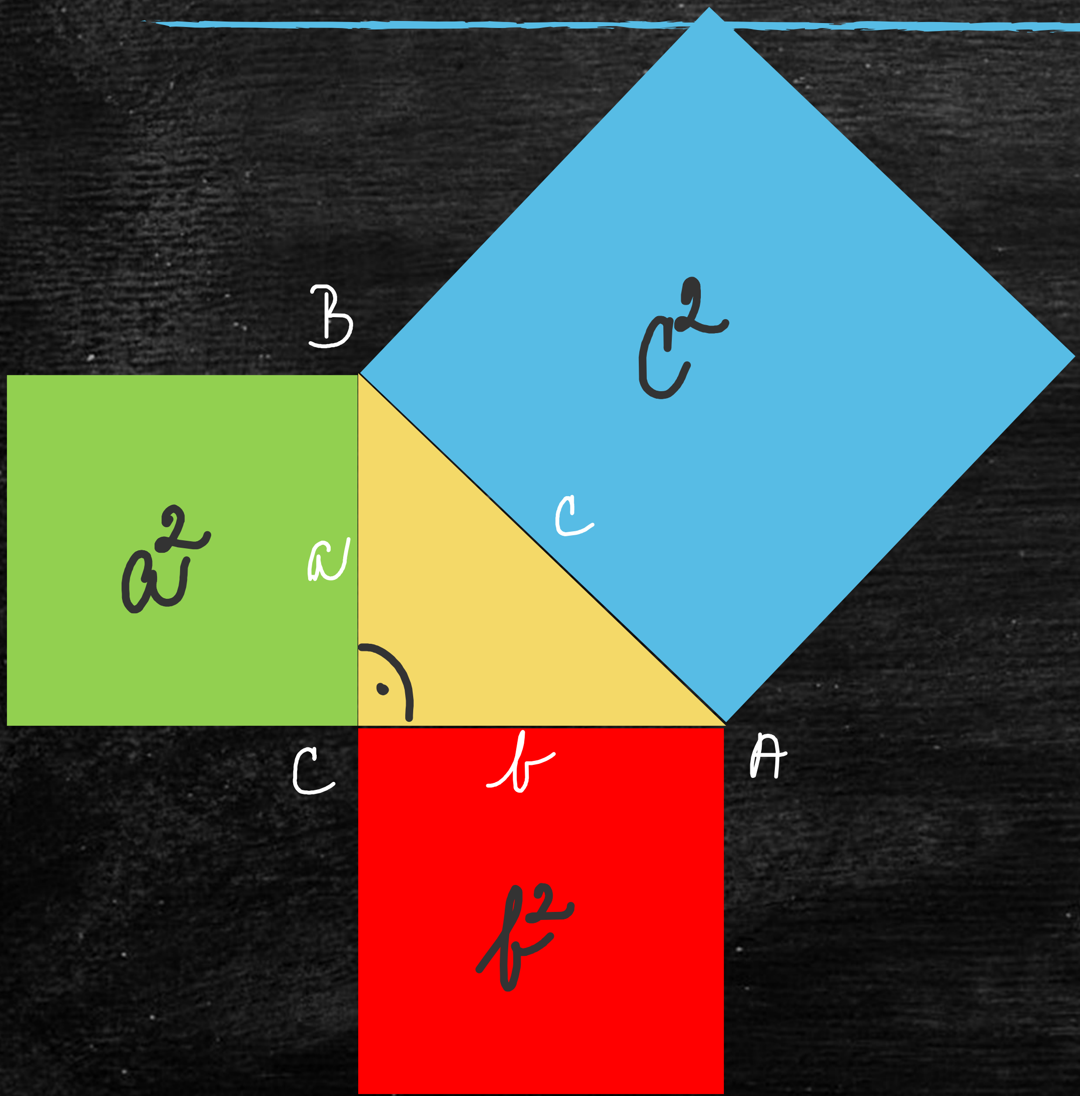
- Slovní úlohy o pohybu

Pythagorova věta

- Pythagorova věta se používá pro výpočet délek stran v pravoúhlém trojúhelníku. Z obecného vyjádření lze odvodit výpočty pro určení délek obou odvěsen a přepony daného pravoúhlého trojúhelníku.
- Pythagorova věta se používá pro řešení konstrukčních nebo početních úloh. V praxi lze tuto větu využít pro přibližné výpočty vzdušných vzdáleností mezi dvěma objekty nebo výpočet délky hranice pozemku.

Pythagoras ze Samu (asi 582 př. n. l. – 496 př. n. l

Pythagorova věta - úvod



Pravoúhlý trojúhelník ABC

c … přepona (nejdelší strana – lež
proti pravému úhlu)

a, b … odvěsny (kratší strany)

Pythagorova věta:

Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Platí v každém pravoúhlém trojúhelníku.

Zjisti, zda je trojúhelník pravoúhlý:

$\triangle ABC$ $a = 3\,cm$
$b = 4\,cm$
$c = 5\,cm$

$c^2 = a^2 + b^2$
$5^2 = 3^2 + 4^2$
$25 = 9 + 16$
$25 = 25$

trojúhelník je pravoúhlý

$\triangle MNO$ $m = 5\,cm$
$n = 6\,cm$
$o = 7\,cm$

$c^2 = a^2 + b^2$
$7^2 = 5^2 + 6^2$
$49 = 25 + 36$
$49 \neq 61$

trojúhelník není pravoúhlý

ypočítej přeponu:

$$\triangle KLM$$

$$k = 5\,cm$$
$$l = 12\,cm$$
$$m = ?\quad (\text{přepona})$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$m^2 = 5^2 + 12^2$$
$$m^2 = 25 + 144$$
$$m^2 = 169$$
$$m = \sqrt{169}$$
$$m = 13\,cm$$

Vypočítej odvěsnu:

$$\triangle ABC$$

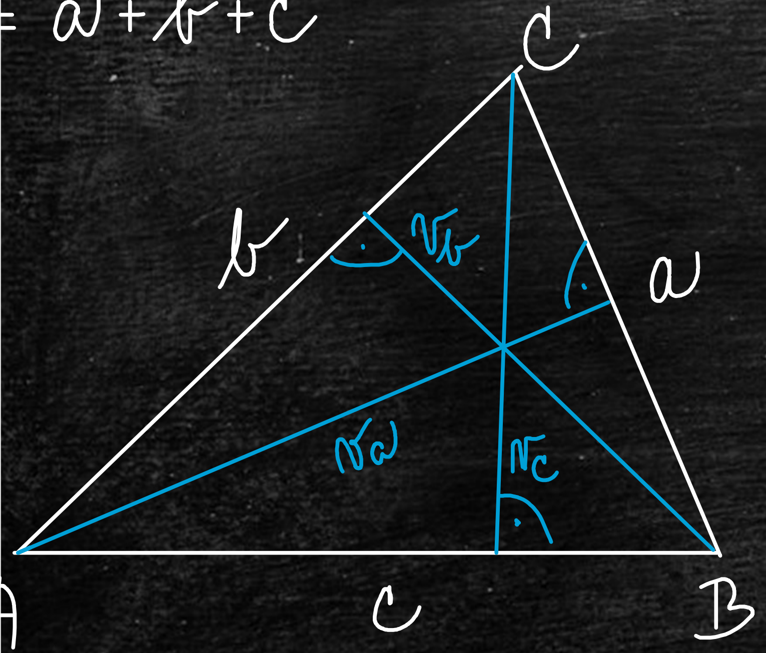
$$a = ?$$
$$b = 6\,cm$$
$$c = 10\,cm$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 10^2 - 6^2$$
$$a^2 = 100 - 36$$
$$a^2 = 64$$
$$a = \sqrt{64}$$
$$a = 8\,cm$$

Obvody a obsahy rovinných obrazců

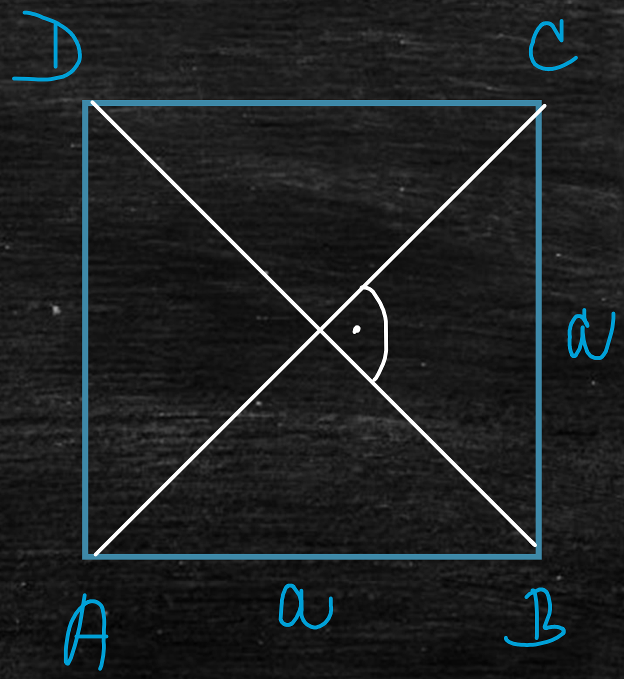
Trojúhelník

$= a + b + c$



$= \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

Čtverec

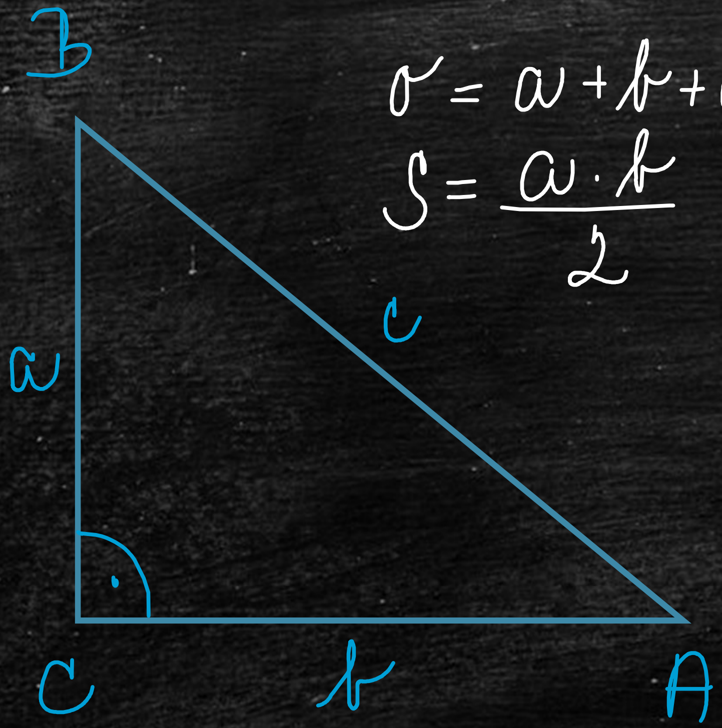


$o = 4 \cdot a$

$S = a^2$

Obvody a obsahy rovinných obrazců

Pravoúhlý trojúhelník



$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

Obdélník

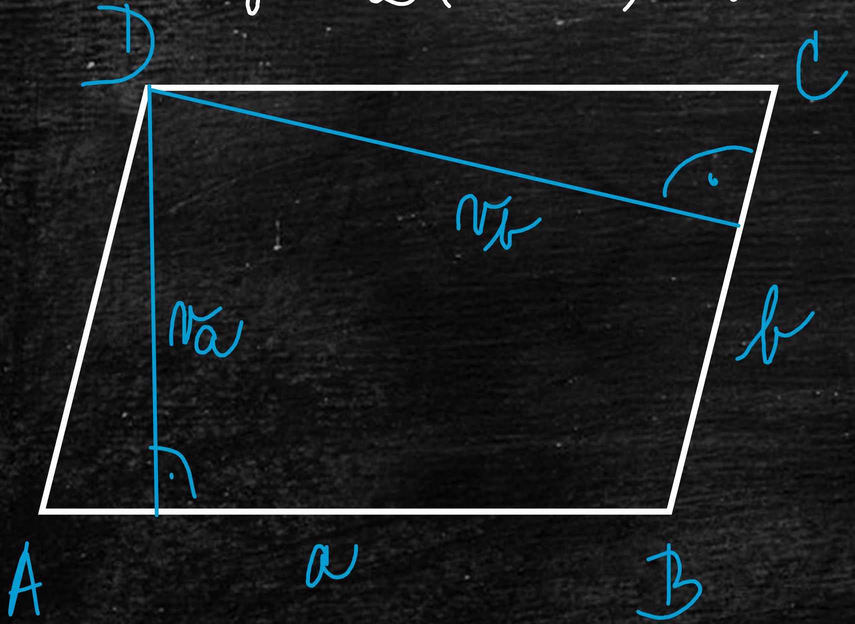
$$o = 2(a+b) = 2a+2$$

$$S = a \cdot b$$

Obvody a obsahy rovinných obrazců

Rovnoběžník

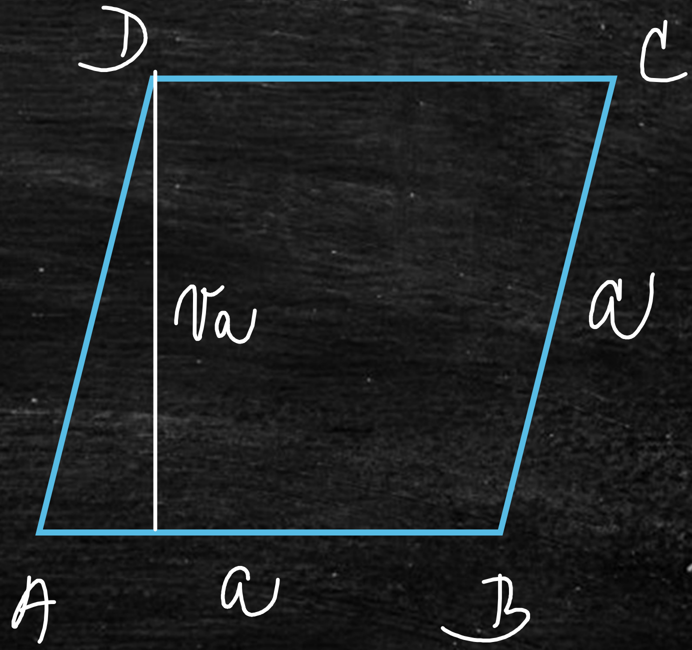
$o = 2(a+b) = 2a + 2b$



$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$

Kosočtverec

$o = 4 \cdot a$



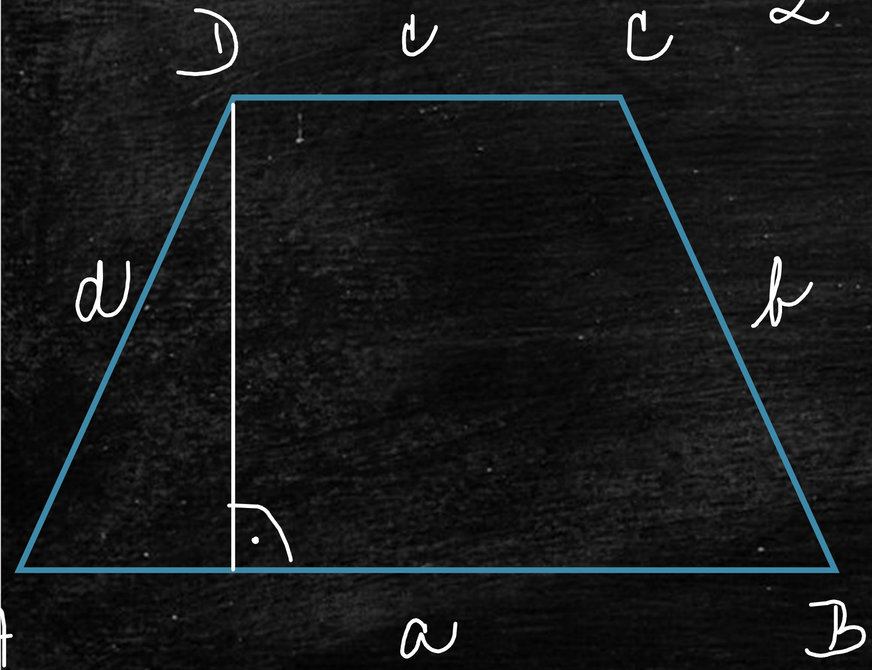
$S = a \cdot v_a$

Obvody a obsahy rovinných obrazců

Lichoběžník

$$o = a + b + c + d$$

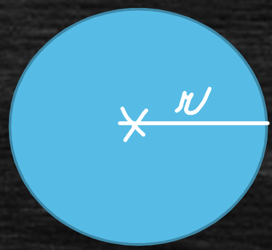
$$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$$



Kruh, kružnice

r = poloměr

$\pi \doteq 3{,}14$



Kruh

$$o = 2\cdot\pi\cdot r$$

$$S = \pi\cdot r^2$$

Kružnice

$$o = 2\cdot\pi\cdot r$$

Příklady - řešené

Vypočítejte délku strany čtverce a jeho obvod, je-li obsah čtverce 225 cm².

$S = 225\ cm^2$

$S = a^2$

$a = \sqrt{225}$

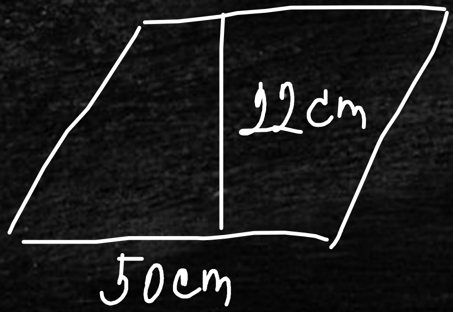
$\underline{\underline{a = 15\ cm}}$

$o = 4 \cdot a$

$o = 4 \cdot 15$

$\underline{\underline{o = 60\ cm}}$

Vypočtěte výměru parcely tvaru kosočtverce, je-li jeho strana 50 m a vzdálenost rovnoběžných stran je 22



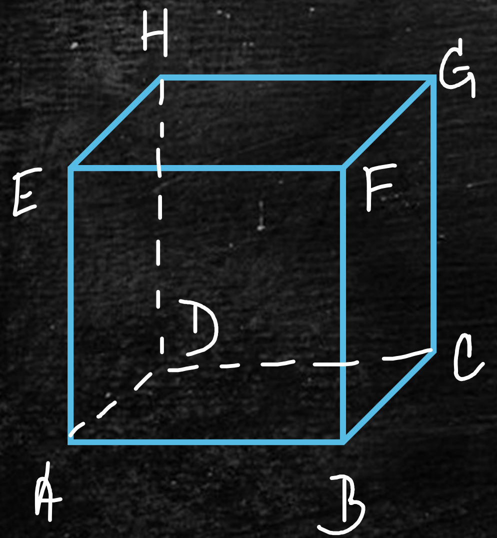
$S = a \cdot v_a$

$S = 50 \cdot 22$

$\underline{\underline{S = 1100\ m^2}}$

Povrchy a objemy těles

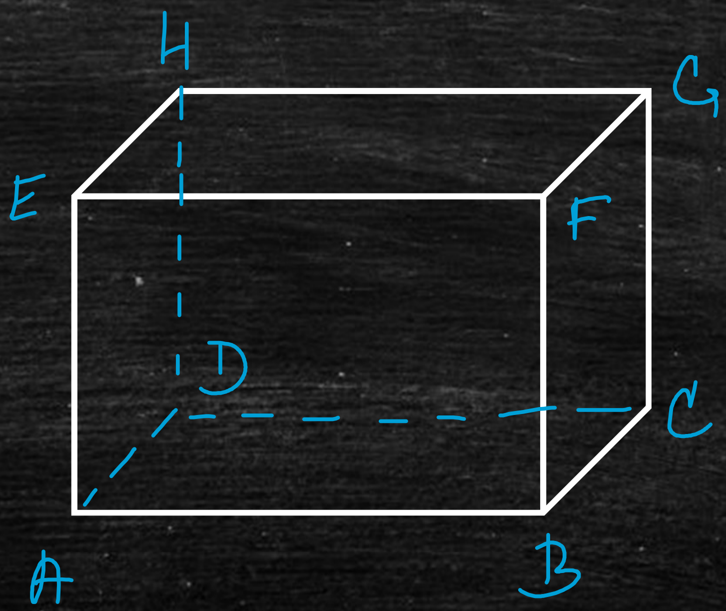
Krychle



$S = 6 \cdot a^2$

$V = a^3$

Kvádr

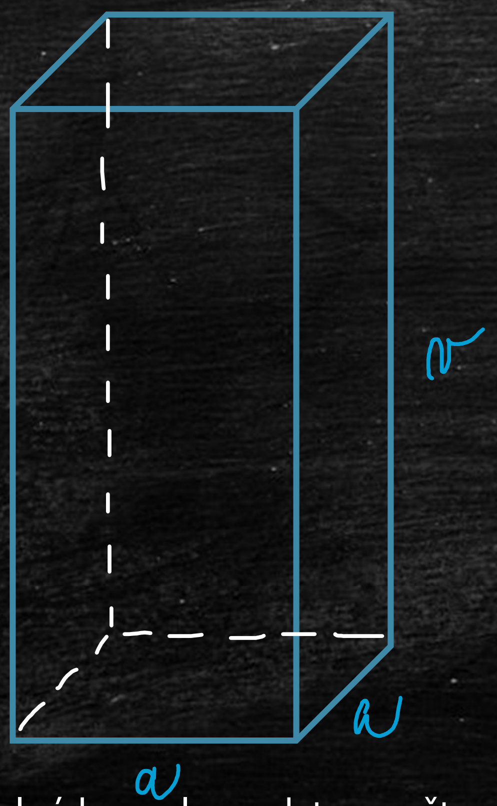


$S = 2(ab + bc +$

$V = a \cdot b \cdot c$

Povrchy a objemy těles

Hranol



Pravidelný hranol s podstavou čtverce

S_p – obsah podstavy (může mít tvar pravidelného nebo nepravidelného mnohoúhelníku)

S_{pl} – obsah pláště

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$$

$$V = S_p \cdot v$$

Povrchy a objemy těles

Válec

S_p – obsah podstavy

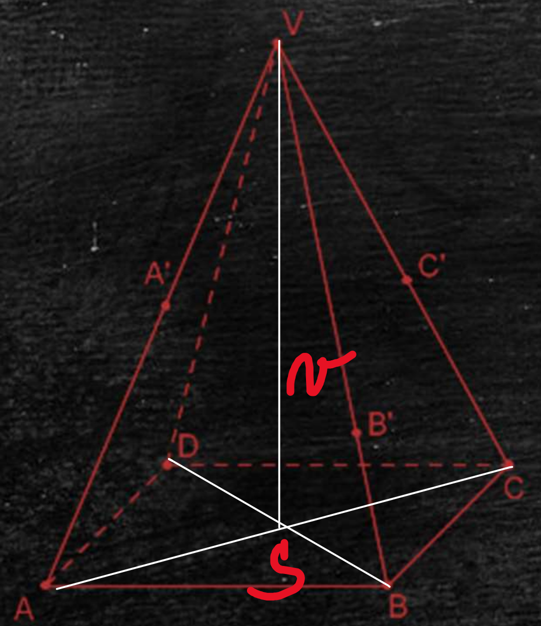
S_{pl} – obsah pláště

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v =$$
$$= 2 \cdot \pi \cdot r(r + v)$$

$$V = S_p \cdot v = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

Povrchy a objemy těles

Jehlan



Pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou čtverce

S_p - obsah podstavy (může mít tvar pravidelného nebo nepravidelného mnohoúhelníku)

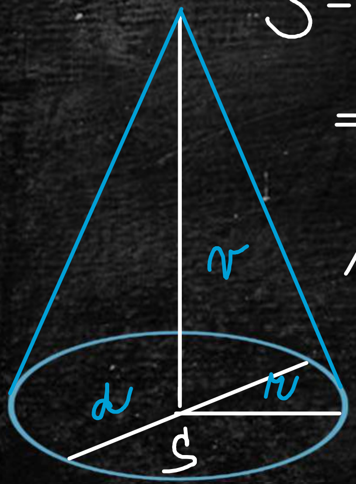
S_{pl} – obsah pláště

$$S = S_p + S_{pl}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$$

Povrchy a objemy těles

Kužel

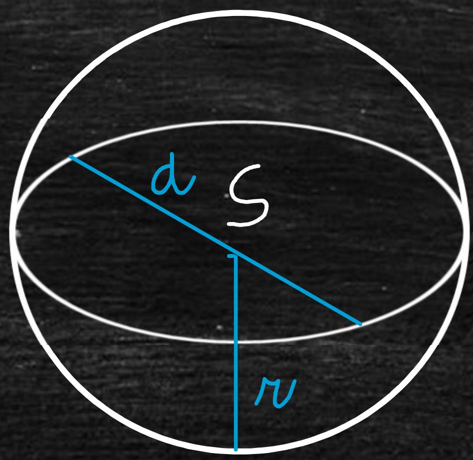


$$S = S_p + S_{pl} =$$
$$= \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$
$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$

(s = strana kužele)

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot v$$

Koule

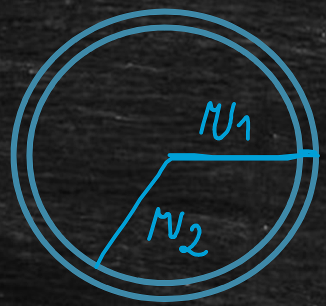


$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Příklady

Roura má průřez tvaru mezikruží o obsahu 11π cm². Vnější průměr roury je 12 cm.

1. Vypočítejte její vnitřní průměr. $\Rightarrow 5\ cm$
2. Kolik litrů vody se vejde do této roury dlouhé 1 m? $\Rightarrow 7{,}85\ l$



$S_P = 11\pi\ cm^2$

$d_1 = 12\ cm \Rightarrow r_1 = 6\ cm$

$S_1 = \pi \cdot r^2 \Rightarrow \pi \cdot 6^2 = 36\pi\ cm^2$

sah kruhu

$S_2 = 36\pi - 11\pi = 25\pi\ cm^2$

$S_2 = \pi \cdot r_2^2$

$25\pi = \pi \cdot r_2^2 \Rightarrow r_2 = 5\ cm$

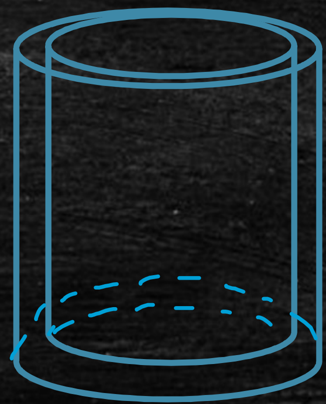
$v = 1\ m$

$V = S_2 \cdot v$

$V = 25\pi \cdot 10$

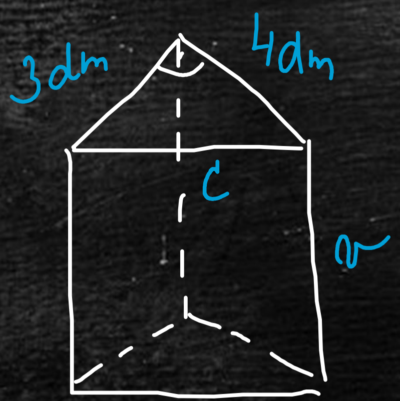
$V = 7\,850\ cm$

$= 7{,}85\ l$



Příklady

Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 4 dm a 3 dm. Jaká je výška tohoto hranolu, je-li jeho povrch 36 dm²?



$a = 4\,dm$

$b = 3\,dm$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4^2 + 3^2$

$c = \sqrt{16+9}$

$c = 5\,dm$

$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$

$36 = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + (3+4+5) \cdot v$

$36 = 12 + 12v$

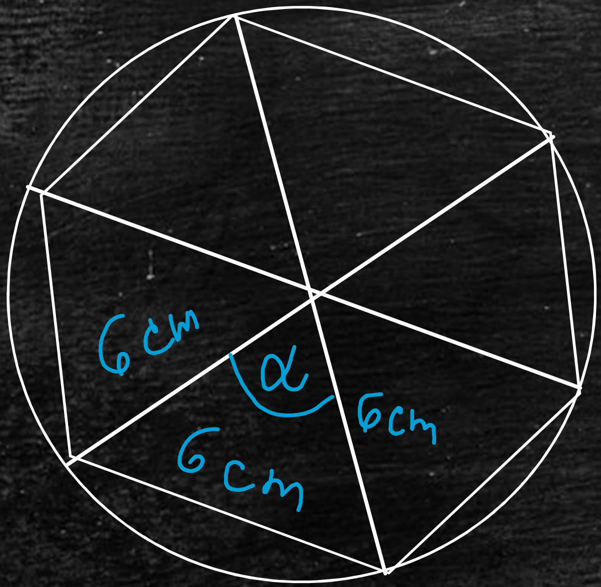
$24 = 12v$

$v = 2\,dm$

Výška hranolu je 2 dm

Příklady

Pravidelný šestiúhelník je vepsaný do kružnice o poloměru 6 cm. Jak dlouhá je strana čtverce, který má stejný obvod jako tento šestiúhelník?



$o = 6 \cdot a$

$o = 6 \cdot 6$

$o = 36$ cm ⇒ obvod šestiúhelníku

$o = 4 \cdot a$ ⇒ obvod čtverce

$36 = 4 \cdot a \Rightarrow a = \frac{36}{4} = 9$ cm

Čtverec má stranu dlouhou 9 cm.

Slovní úlohy o pohybu

Jak na slovní úlohu o pohybu?

1. Základem řešení všech slovních úloh je pozorné přečtení zadání, pokud je to nutné, přečtěte si zadání několikrát – lépe vícekrát než jednou ;-).

2. Dalším krokem je náčrt situace, o které se ve slovní úloze mluví. Nejčastěji se jedná o "potkávačku", kdy se dva objekty pohybují proti sobě a někde "mezi" se potkají. Druhým nejčastějším typem je "doháněčka", kdy rychleji pohybující se objekt dohoní objekt, který vyjel dříve.

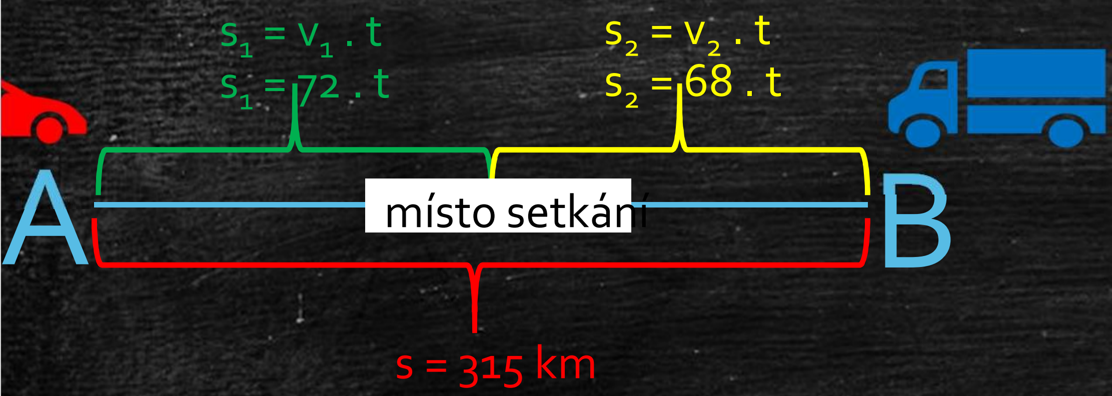
3. Naše zhodnocení situace rozhodne, zda se budou dráhy obou objektů rovnat ($s_1 = s_2$) nebo zda jejich součet bude tvořit dráhu celkovou ($s = s_1 + s_2$).

4. Po provedení této analýzy situace zapíšeme hodnoty do tabulky. Jednotlivé dráhy, které se buď rovnají nebo jejich součet je celkovou dráhou, se vypočítají jako součin rychlosti a času.

5. Na základě tabulky vytvoříme rovnici, kterou vypočítáme. Poté většinou musíme převést zlomek na časový údaj. A máme hotovo :-).

Slovní úlohy o pohybu – pohyb proti sobě (stejný čas výjezd

sta A vyjede v 13.30 h osobní auto rychlostí 72 km/h. V téže chvíli vyjede proti němu z místa B, které je od místa A
leno 315 km, kamión rychlostí 68 km/h. Kdy a kde se setkají?



Vycházíme z předpokladu, že součet trasy, kterou uje
osobní automobil a kterou ujede kamión, je celková
vzdálenost:

$s = s_1 + s_2$

$s = v_1 . t + v_2 . t$

$315 = 72 . t + 68 . t$

$315 = 140 . t \qquad / : 140$

$t = 2{,}25$ h (2 h 15 min) … 13 h 30 min + 2 h 15 min = 15
45 min

$s_1 = v_1 . t = 72 . 2{,}25 = 162$ km od místa A

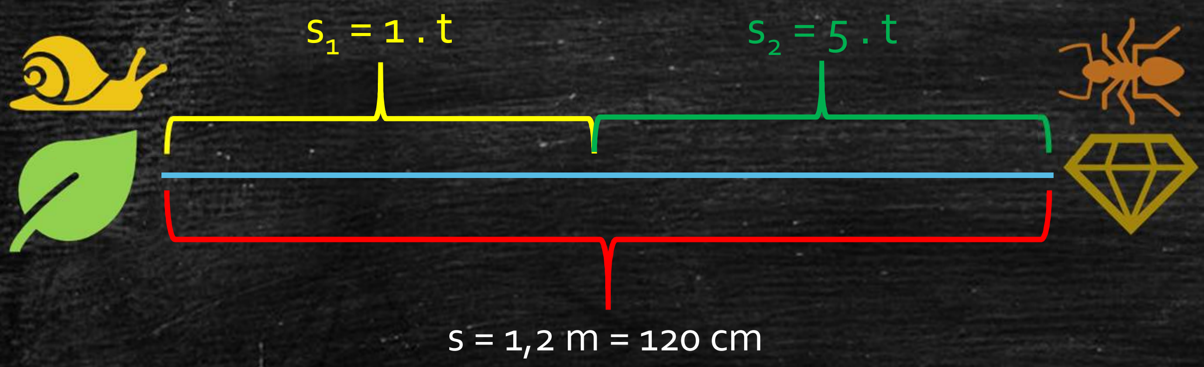
$s_2 = v_2 . t = 68 . 2{,}25 = 153$ km od místa B

pověď: Auto se s kamiónem setká v 15.45 h ve vzdálenosti
m od místa A, resp. 153 km od místa B.

: Abyste měli jistotu, že jste počítali správně, sečtěte si
tlivé trasy (tj. 162 km + 153 km). Výsledek musí vyjít stejně
e celkové vzdálenost mezi dvěma místy.

Řešené úlohy

tu vyrazí šnek rychlostí 1 cm/min. Z kamene ve stejné chvíli vyrazí proti němu mravenec rychlostí 5 cm/min. álenost mezi listem a kamenem je 1,2 m. Za jak dlouho se setkají a v jaké vzdálenosti?



$s = s_1 + s_2$

$s = v_1 \,.\, t + v_2 \,.\, t$

$120 = 1 \,.\, t + 5 \,.\, t$

$120 = 6 \,.\, t \quad / : 6$

$t = 20$ min

$s_1 = v_1 \,.\, t = 1 \,.\, 20 = 20$ cm od listu

$s_2 = v_2 \,.\, t = 5 \,.\, 20 = 100$ cm od kamene

Odpověď: Šnek a mravenec se setkají po 20 minutách ve vzdálenosti 20 cm od listu, resp. 100 cm od kamen

Úlohy k řešení

- Jan vyjde v 9.00 h z Klenčí rychlostí 6 km/h. Naproti němu vyběhne taktéž v 9.00 hod z Lázní Milan rychlos
12 km/h. Z Klenčí do Lázní je trasa dlouhá 45 km. V kolik hodin a kde se Jan a Milan setkají?
(řešení: t = 2,5 h, setkají se v 11.30 h, s1 = 15 km od Klenčí, s2 = 30 km od Lá

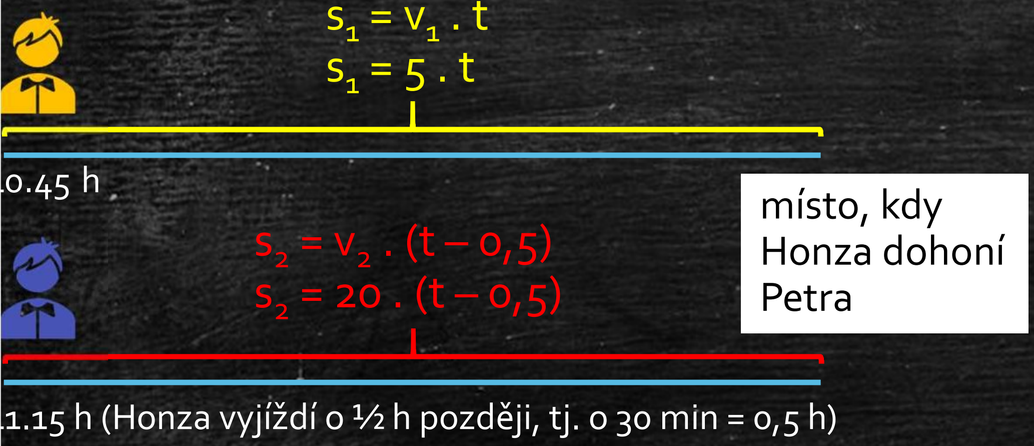
- Cyklista vyjede z místa A rychlostí 25 km/h. Proti němu vyjede motocyklista rychlostí 55 km/h. Vzdálenost
míst A a B je 60 km. Kdy a kde se setkají?
(řešení: t = 0,75 h (45 min), s1 = 18,75 km od A, s2 = 41,25 km o

- Auto vyjede z města v 17.30 hod rychlostí 90 km/h. Nákladní auto vyjede taktéž v 17.30 hod z vesnice proti
němu rychlostí 70 km/h. Trasa z města do vesnice měří 480 km. Kdy a kde se auto s nákladním autem setk
(řešení: t = 3 h, setkají se v 20.30 h, s1 = 270 km od města, s2 = 210 km od vesn

- Letiště L je od letiště T vzdáleno 2500 km. Z letiště L vylétne letadlo rychlostí 240 km/h. Z letiště T vylétne
letadlo rychlostí 260 km/h. Kdy a kde se letadla setkají?
(řešení: t = 5 h, s1 = 1200 km od L, s2 = 1300 km

Slovní úlohy o pohybu – pohyb za sebou

vyšel z domova v 10.45 h průměrnou rychlostí 5 km/h, za ½ h za ním vyjel na kole po stejné dráze Honza průměrnou osti 20 km/h. Za kolik minut Honza dohoní Petra a kolik km při tom ujede?



Vycházíme z předpokladu, že trasy obou jsou shodné, tj. Petr stejnou vzdálenost jako Honza ujede na kole. Zároveň musím odečítat čas v hodinách, o který vyjel Honza později:

$s_1 = s_2$

$v_1 \, . \, t = v_2 \, . \, (t - 0{,}5)$

$5 \, . \, t = 20 \, . \, (t - 0{,}5)$

$5 \, . \, t = 20 \, . \, t - 10 \qquad / - 20 \, . \, t$

$-15 \, . \, t = -10 \qquad / : (-15)$

$t = \frac{2}{3}$ h (40 min) … 10.45 h + 40 min = 11 h 25 min

$s_1 = v_1 \, . \, t = 5 \, . \, \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ km $= 3\frac{1}{3}$ km ujde Petr

$s_2 = v_2 \, . \, (t - 0{,}5) = 20 \, . \, (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = 20 \, .(\frac{4-3}{6}) = 20 \, . \, \frac{1}{6} = \frac{20}{6} = 3\frac{2}{6} = 3$

ujede Honza (*dráha obou vyšla stejná, skutečně tedy $s_1 = s_2$*)

věď: Honza dohoní Petra za 40 min, tj. v 11 h 25 min

e přitom vzdálenost $3\frac{1}{3}$ km.

Abyste měli jistotu, že jste počítali správně, vypočtěte si asy a jejich výsledky musí být totožné.

Připomínám převody min na h: **dělit**

Řešené úlohy

lzně směrem na Prahu vyjela v 5.20 h motorka průměrnou rychlostí 40 km/h. Ze stejného místa stejným směrem za
 vyjel o hodinu později autobus průměrnou rychlostí 80 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od Plzně dohoní
obus motorku?

$s_1 = v_1 \,.\, t$
$s_1 = 40 \,.\, t$

o h

$s_2 = v_2 \,.\, (t - 1)$
$s_2 = 80 \,.\, (t - 1)$

místo, autobus dohoní motorku

o h (autobus vyjíždí o 1 h později, tj. o 60 min = 1 h)

$s_1 = s_2$
$v_1 \,.\, t = v_2 \,.\, (t - 1)$
$40 \,.\, t = 80 \,.\, (t - 1)$
$40 \,.\, t = 80 \,.\, t - 80 \quad / - 80 \,.\, t$
$- 40 \,.\, t = - 80 \quad / : (-40)$
$t = 2$ h (120 min) … 5.20 h + 2 h = 7.20 h

$s_1 = v_1 \,.\, t = 40 \,.\, 2 = 80$ km ujede motorka
$s_2 = v_2 \,.\, (t - 1) = 80 \,.\, (2 - 1) = 80$ km ujede autobus(*dráha obo*
vyšla stejná, skutečně tedy $s_1 = s_2$)

pověď: Autobus dohoní motorku v 7.20 h ve vzdálenosti 80 km od Plzně.

Úlohy k řešení

Na školním lyžařském zájezdu vyjelo z chaty A v 9 h 30 min družstvo k chatě B rychlostí 2 m/s. O 15 min později za nimi vyjel instruktor rychlostí 3 m/s. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od chaty A dohoní instruktor družstvo?

(řešení: t (družstvo) = 3/4 h = 45 min, t (instruktor) = 0,5 h = 30 min, dojede družstvo v 10 h 15 min, 5,4 km od cha

Pozn.: převod m/s na km/h: násob

Z Prahy vyjelo v 8 h 25 min auto průměrnou rychlostí 50 km/h a za ním vyjel ze stejného místa stejným směrem autobus v 8 h 49 min průměrnou rychlostí 70 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od Prahy dohoní autobus aut

(řešení: t (auto) = 1,4 h = 1 h 24 min, t (autobus) = 1 h, dohoní auto v 9 h 49 min, 70 km od Pr

Ze skladu vyjelo v půl šesté večer nákladní auto průměrnou rychlostí 40 km/h. Za 1,5 h vyjelo za ním osobní auto průměrnou rychlostí 70 km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od skladu dohoní nákladní auto?

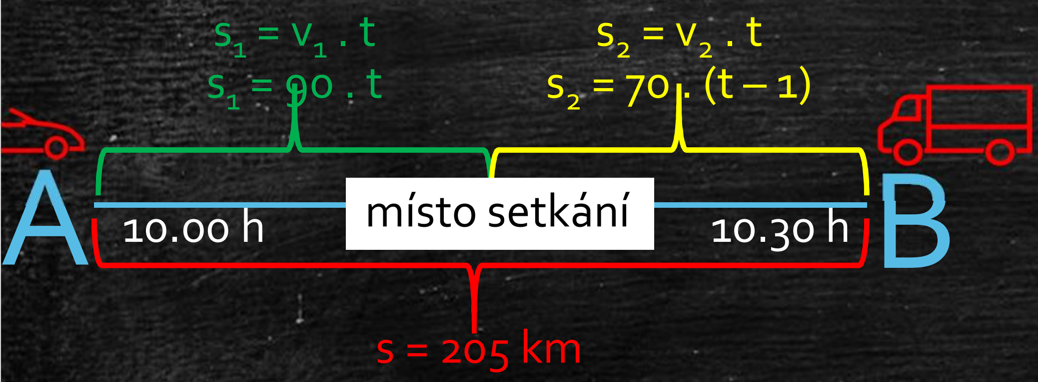
(řešení: t (nákl. auto) = 3,5 h = 3 h 30 min, t (os. auto) = 2 h, dojede nákl. auto v 21.00 h, 140 km od skl

V 7.20 h z kasáren vyjela kolona aut rychlostí 28 km/h. Za 1 h 15 min za ní vyjelo terénní vozidlo rychlostí 63 km/h. V jaké vzdálenosti od kasáren dohonilo vozidlo kolonu a kolik hodin bylo?

(řešení: t (kolona) = 2,25 h = 2 h 15 min, t (vozidlo) = 1 h, setkají se v 9.35 h, vzdálenost od kasáren 63

Slovní úlohy o pohybu – pohyb proti sobě (různý čas výjezdu

sta A vyjede v 10.00 h osobní auto rychlostí 90 km/h. V 10.30 h vyjede proti němu z místa B, které je od místa A vzdá
km, nákladní auto rychlostí 70 km/h. Kdy a kde se setkají?



Vycházíme z předpokladu, že součet trasy, kterou uje
osobní automobil a kterou ujede nákladní auto, je
celková vzdálenost. Zároveň musíme odečítat čas v
hodinách, o který vyjelo druhé auto později:

$s = s_1 + s_2$

$s = v_1 . t + v_2 . (t - 0{,}5)$

$205 = 90 . t + 70 . (t – 0{,}5)$

$205 = 90 . t + 70 . t - 35 \quad / + 35$

$240 = 160 . t \quad / : 160$

$t = 1{,}5$ h (1 h 30 min) … 10.00 h + 1 h 30 min = 11 h 30 r

$s_1 = v_1 . t = 90 . 1{,}5 = 135$ km od místa A

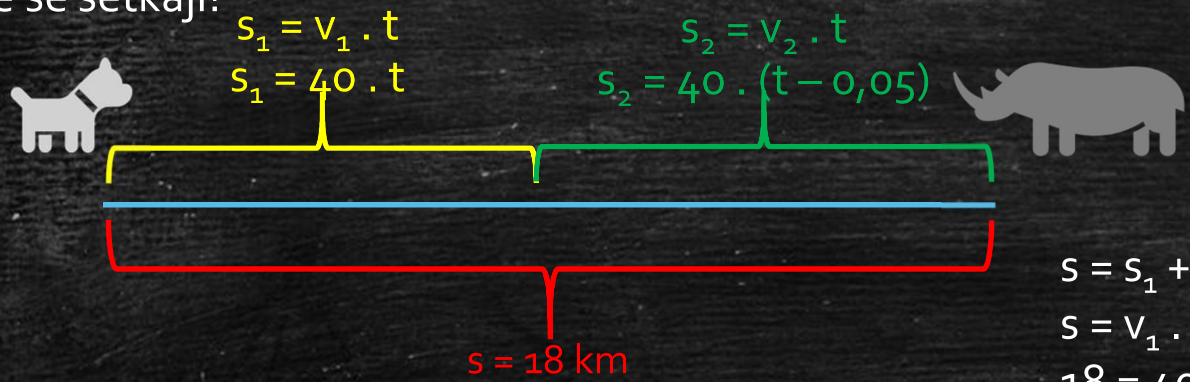
$s_2 = v_2 . (t - 0{,}5) = 70 . (1{,}5 – 0{,}5) = 70$ km od místa B

ověď: Auto se s nákl. autem setká v 11.30 h ve vzdálenosti
m od místa A, resp. 70 km od místa B.

*Abyste měli jistotu, že jste počítali správně, sečtěte si jednotlivé
(tj. 135 km + 70 km). Výsledek musí vyjít stejně jako je celkové
enost mezi dvěma místy.*

Řešené úlohy

vyběhne rychlostí 40 km/h. Naproti němu vyběhne o 3 min později stejnou rychlostí ve vzdálenosti 18 km nosorože
a kde se setkají?



$s = s_1 + s_2$

$s = v_1 \,.\, t + v_2 \,.\, (t - 0{,}05)$

$18 = 40 \,.\, t + 40 \,.\, (t - 0{,}05)$

$18 = 40 \,.\, t + 40 \,.\, t - 2 \qquad / + 2$

$20 = 80 \,.\, t \qquad / : 80$

$t = 0{,}25$ h (15 min)

$s_1 = v_1 \,.\, t = 40 \,.\, 0{,}25 = 10$ km od místa A

$s_2 = v_2 \,.\, (t - 0{,}05) = 40 \,.\, (0{,}25 - 0{,}05) = 8$ km od místa B

Odpověď: Než se setkají, uběhne pes 10 km za 15 min a nosorožec 8 km za 12 min.

Úlohy k řešení

Želva vyrazí od kamene rychlostí 500 m/h. Dikobraz vyrazí od stromu rychlostí 3200 m/h o 45 min později. Vzdáler
kamene a stromu je 5 km. Kdy a kde se setkají?

(řešení: t (želvy) = 2 h, t (dikobrazu) = 1 h 15 min, s_1 = 1 km od kamene, s_2 = 4 km od stro

Holub vyletí z holubníku rychlostí 60 km/h. Čáp vyletí z hnízda rychlostí 50 km/h o 48 min později. Vzdálenost holubníku a hnízda je 400 km. Kdy a kde se setkají?

(řešení: t (holub) = 4 h, t (čáp) = 3 h 12 min, s_1 = 240 km od holubníku, s_2 = 160 km od hn

Kapr vyplave v 12.55 h rychlostí 8 km/h. Naproti němu ve vzdálenosti 4,7 km vyplave s 6 min zpožděním štika rychlostí 18 km/h. Kdy a kde se setkají?

(řešení: t (kapr) = 0,25 h = 15 min, t (štika) = 0,15 h = 9 min, setkají se v 13.10 h, s_1 = 2 km (kapr), s_2 = 2,7 km (št

Orel skalní vylétne z hnízda v 17.40 h rychlostí 130 km/h. Naproti němu ve vzdálenosti 187,5 km vylétne o 9 min později rorýs rychlostí 150 km/h. Kdy a kde se setkají?

(řešení: t (orel) = 0,75 h = 45 min, t (rorýs) = 0,6 h = 36 min, setkají se v 18.25 h, s_1 = 97,5 km (orel), s_2 = 90 km (ro

ímačky v pohodě 9 - matematika, 5th ed.; Vydavatelství Taktik International, s.r.o.: Praha, 2020.
hagorova věta - znění (Pythagorean theorem) :: Výuka matematiky a angličtiny. Výuka matematiky a angličtiny [online]. Copyright © 2012 Všechna práva vyhrazena.
28.02.2021]. Dostupné z: https://matikaj.webnode.cz/news/pythagorova-veta-zneni/
yb | skolaposkole.cz. Škola po škole [online]. Copyright © 2014 [cit. 11.03.2022]. Dostupné z: https://skolaposkole.cz/matematika-zs/9-rocnik/slovni-ulohy/pohyb
TUÁLNÍ INFORMACE ZŠ GENPOR. FR. PEŘINY [online]. Copyright ©Wa [cit. 14.03.2022]. Dostupné z: https://www.zs-perina.cz/