64. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Fabián má čtyři kartičky, na každou z nich napsal jedno celé kladné číslo menší než 10. Čísla napsal různými barvami, přičemž platí následující:

- Součin zeleného a žlutého čísla je zelené číslo.
- Modré číslo je stejné jako červené číslo.
- Součin červeného a modrého čísla je dvojmístné číslo zapsané zelenou a žlutou číslicí (v tomto pořadí).

Určete tato čtyři čísla. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Fabián psal pouze přirozená čísla. Z první podmínky vyplývá, že vynásobíme-li zelené číslo žlutým, nezměníme jeho hodnotu. To znamená, že žluté číslo je 1. Z druhé podmínky plyne, že modře a červeně napsal stejné číslo. Ze třetí podmínky potom plyne, že vynásobíme-li dvě červená (resp. dvě modrá) čísla, dostaneme jako součin dvojmístné číslo končící jedničkou (žluté číslo je 1). Projdeme tedy všechny možnosti:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 3 \cdot 3 = 9, \quad 4 \cdot 4 = 16,$$
$$5 \cdot 5 = 25, \quad 6 \cdot 6 = 36, \quad 7 \cdot 7 = 49, \quad 8 \cdot 8 = 64, \quad 9 \cdot 9 = 81.$$

Uvedené podmínce vyhovuje jediná, a to poslední možnost. Fabián napsal červeně číslo 9, modře číslo 9, zeleně číslo 8 a žlutě číslo 1.

Návrh hodnocení. 2 body za určení žlutého čísla, z toho 1 bod za zdůvodnění; 3 body za prošetření všech možností a za nalezení součinu $9 \cdot 9 = 81$; 1 bod za správné určení zbylých tří čísel.

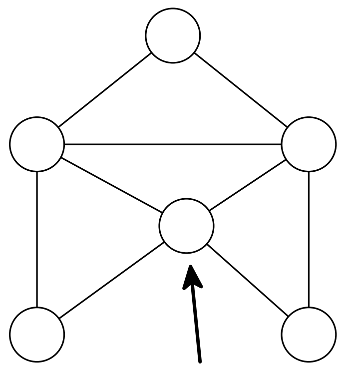
Pokud řešitel neuvede všechny možnosti součinu (má jen výsledný součin $9 \cdot 9 = 81$), neodůvodní, že víc řešení není, a ani nevysvětlí, že prošel všechny možnosti a jiné řešení nenašel, udělte nejvýše 4 body.

Přiřazení barev jednotlivým číslům není nutnou součástí řešení, proto je nijak bodově nepostihujte.

Z6–II–2

Na den dětí otevřeli v zoo bludiště se šesti stanovišti, na kterých se rozdávaly bonbóny. Na jednom stanovišti se při každém vstupu rozdávalo 5 bonbónů, na dvou stanovištích se rozdávalo po 3 bonbónech a na třech stanovištích po 1 bonbónu. Jirka nejprve vstoupil na stanoviště označené šipkou a pokračoval tak, že každou cestičkou prošel nejvýše jednou.

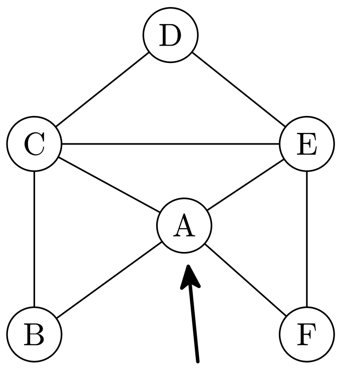
Určete, kolik nejvíce bonbónů mohl Jirka dostat. (*E. Novotná*)



Možné řešení. Nejvíc bonbónů může Jirka dostat, když každou cestičkou projde právě jednou a na stanovištích, kterými prochází nejčastěji, se rozdává nejvíce bonbónů. Projít bludištěm uvedeným způsobem je možné, viz např. cestu

A—B—C—D—E—C—A—E—F—A

podle značení jako na obrázku.



Existují také jiné možné cesty, které však není nutné rozebírat. Podstatné je, že umíme určit, kolikrát lze do každého stanoviště vstoupit. To nezávisí na zvolené cestě, ale pouze na počtu cestiček, které do daného stanoviště vedou. Do stanovišť B, F a D vedou dvě cestičky, do stanovišť A, C a E vedou čtyři cestičky. Přitom do stanoviště A se vstupuje zvenku, ostatními stanovišti lze pouze projít (tzn. kolikrát se vstoupí, tolikrát se vystoupí). Platí tedy, že

- do stanoviště A může Jirka vstoupit třikrát (jednou zvenku, jednou prochází a naposledy zde končí),
- do každého ze stanovišť C a E může Jirka vstoupit dvakrát (tj. dvakrát prochází),
- do každého ze stanovišť B, D a F může Jirka vstoupit pouze jednou (tj. jednou prochází).

Jirka tedy mohl získat nejvíce bonbónů, pokud by se na stanovišti A rozdávalo 5 bonbónů, na stanovištích C a E po 3 bonbónech a na zbylých stanovištích po 1 bonbónu. V takovém případě by Jirka získal na jednom stanovišti třikrát po 5 bonbónech, na dvou stanovištích dvakrát po 3 bonbónech a na třech stanovištích po 1 bonbónu, tj.

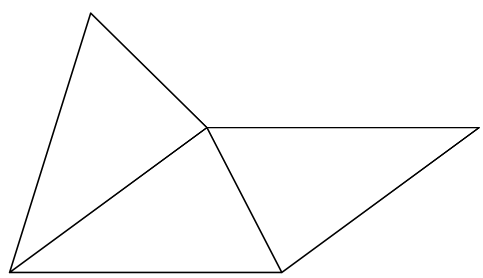
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 30$$

bonbónů.

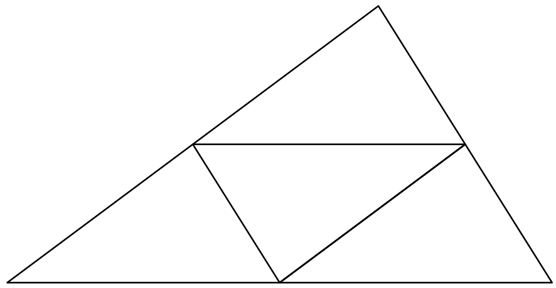
Návrh hodnocení. 2 body za určení nějaké cesty, která prochází každou cestičkou právě jednou; 2 body za vyčíslení navštěvovanosti jednotlivých stanovišť; 1 bod za přiřazení počtu rozdávaných bonbónů jednotlivým stanovištím; 1 bod za odpovídající celkový zisk bonbónů.

Z6–II–3

Honzík měl čtyři shodné trojúhelníky. Skládal z nich různé útvary, a to tak, že trojúhelníky k sobě přikládal stranami stejné délky. Nejprve složil útvar ze tří trojúhelníků jako na obrázku, který měl obvod 43 cm.

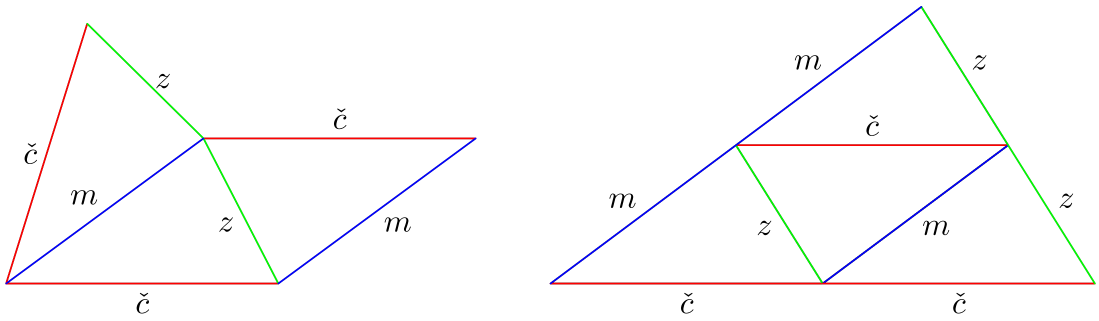


Pak útvar rozebral a složil jiný útvar ze tří trojúhelníků, který měl obvod 35 cm. Nakonec ze všech čtyř trojúhelníků složil další útvar jako na obrázku, a ten měl obvod 46 cm.



Určete délky stran trojúhelníků. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Navzájem shodné strany v použitých trojúhelnících můžeme rozlišit barevně — použijeme např. červenou, zelenou a modrou barvu, odpovídající délky v centimetrech označíme $č$, z a m:



V obvodu posledního útvaru je strana každé barvy zastoupena právě dvakrát. Tento obvod je roven

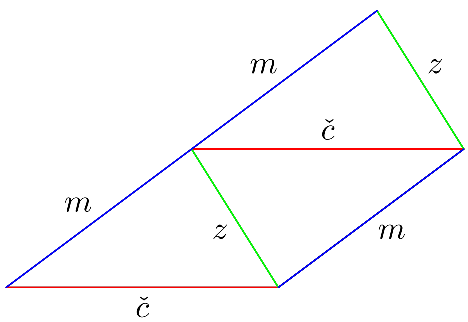
$$2 \cdot (č + z + m) = 46,$$

proto je obvod jednoho trojúhelníku roven 23 cm. V obvodu prvního útvaru jsou tři červené strany, jedna zelená a jedna modrá, což je totéž jako dvě červené strany a strany obvodu jednoho trojúhelníku. Tento obvod je roven

$$3č + z + m = 2č + (č + z + m) = 43.$$

Obvod jednoho trojúhelníku je 23 cm, proto $2č = 43 - 23 = 20$ (cm) a délka jedné strany trojúhelníku je $č = 10$ (cm).

Druhý útvar (který není v zadání zobrazen) je složen ze tří trojúhelníků podle stejných pravidel jako první, např. takto:



Obvod tohoto útvaru sestává z jedné červené, jedné zelené a třech modrých stran, což je totéž jako strany obvodu jednoho trojúhelníku a dvě modré strany navíc. Tento obvod je podle zadání roven

$$č + z + 3m = (č + z + m) + 2m = 35.$$

Stejně jako výše určíme délku druhé ze stran trojúhelníku: $2m = 35 - 23 = 12\,(\text{cm})$, tedy $m = 6\,(\text{cm})$. Ze znalosti obvodu a dvou stran v trojúhelníku vyjádříme délku strany třetí: $z = 23 - 10 - 6 = 7\,(\text{cm})$.

Délky stran Honzíkových trojúhelníků jsou 10 cm, 6 cm a 7 cm. (Výsledek je v souladu s trojúhelníkovou nerovností.)

Návrh hodnocení. 2 body za určení obvodu trojúhelníku; 2 body za určení délky jedné strany; po 1 bodu za určení délek zbylých dvou stran.

Poznámka. U druhého útvaru lze uvažovat ještě jiné způsoby složení — v každém případě se v obvodu útvaru objevuje vždy jedna strana trojúhelníku vícekrát. Při uvedeném značení by nanejvýš vyšly délky stran z a m naopak, což je ekvivalentní jinému značení na začátku. V řešení úlohy není nutné všechny možnosti rozebírat.